

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: <https://www.researchgate.net/publication/328789933>

ANÁLISE DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS E MODOS DE VIBRAÇÃO DO TENDÃO DE UMA PLATAFORMA OFFSHORE Analysis of the natural frequencies and mode shape of vibration of the tendon of an offsho...

Conference Paper · October 2018

CITATIONS

0

READS

35

3 authors, including:



Brendon Menezes De Abreu
Universidade Federal do Piauí

3 PUBLICATIONS 0 CITATIONS

[SEE PROFILE](#)



Simone dos Santos
Universidade Federal do Piauí

23 PUBLICATIONS 24 CITATIONS

[SEE PROFILE](#)

Some of the authors of this publication are also working on these related projects:



Dynamic Analysis of Beam [View project](#)



Stability of Structures [View project](#)

ANÁLISE DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS E MODOS DE VIBRAÇÃO DO TENDÃO DE UMA PLATAFORMA OFFSHORE

Analysis of the natural frequencies and mode shape of vibration of the tendon of an offshore platform

Brendon Menezes de Abreu (1); Bruno Ribeiro da Luz (2); Simone dos Santos Hoefel (3).

- (1) Graduando, Universidade Federal do Piauí, Teresina - PI, Brasil, (P) Apresentador;
(2) Graduando, Universidade Federal do Piauí, Teresina - PI, Brasil;
(3) Profa. Dra., Universidade Federal do Piauí, Teresina - PI, Brasil.
E-mail para Correspondência: brendon.m.abreu@gmail.com;

Resumo: As plataformas de petróleo *offshore* são estruturas utilizadas na perfuração em alto-mar que abrigam trabalhadores e máquinas necessárias para a perfuração de poços no leito do oceano e para a extração de petróleo e/ou gás natural. Essas estruturas podem ser modeladas como cabos flexíveis ou vigas. Este artigo apresenta um modelo para análise de vibração de um tendão de uma plataforma flutuante, *Tension Leg Platform* (TLP). O modelo consiste numa viga de Euler-Bernoulli com suportes elásticos compostos de molas translacionais e rotacionais e uma massa concentrada na extremidade livre. A equação do movimento é obtida através do Princípio de Hamilton e a equação da frequência é obtida analiticamente. Posteriormente, um elemento de viga com dois graus de liberdade por nó é desenvolvido. A influência da rigidez dos suportes elásticos, bem como o efeito da inclusão da massa de água é investigada através de exemplos numéricos.

Palavras chaves: Offshore; Tension Leg Platform; Euler-Bernoulli.

Abstract: Offshore oil platforms are large structures used for offshore drilling that house workers and machines required to drill wells in the ocean floor and for the extraction of oil and/ or natural gas. These structures can be modeled by flexible cable or beam. This paper presents a model for vibration analysis of a tendon of a floating platform, Tension Leg Platform (TLP). The model consists of a Euler-Bernoulli beam with composite elastic supports of translational and rotational spring and a mass concentrated at the free end. The equation of motion is derived from the Hamilton principle and the frequency equation is obtained analytically. Subsequently, a beam element with two degrees of freedom per node is developed. The influence of the rigidity of the elastic supports, as well as the effect of the inclusion of the water body is investigated through numerical examples.

Keywords: Offshore; Tension Leg Platform; Euler-Bernoulli.

1 INTRODUÇÃO

Estruturas *Offshore* são usadas na indústria do petróleo tanto para exploração quanto para produção e armazenagem de petróleo. Em geral, existem dois tipos de estruturas *offshore*: as estruturas fixas e as flutuantes. Estruturas fixas são projetadas para resistir a forças ambientais sem deslocamentos substanciais. Neste caso, uma análise dinâmica linear pode ser suficiente. Já as estruturas flutuantes são projetadas para permitir deformações e deflexões pequenas, mas não negligenciáveis.

Vários pesquisadores se dedicaram a estudar o problema neste campo. Por exemplo, Uscilowska e Kolodziej (1998) forneceram uma solução analítica de uma viga *cantilever* parcialmente imersa com massa excêntrica na extremidade livre. Adrezin e Benaroya (1999), utilizando a teoria de Euler-Bernoulli e com a equação de Morison examinaram o comportamento transversal não-linear de uma TLP com tensão dependendo do tempo devido à gravidade e à flutuabilidade. Auciello e Ercolano (2004) apresentaram solução para uma viga não prismática, considerando a formulação de Timoshenko para o problema de vibração livre usando o método de energia. Wu e Chen (2005) solucionaram a vibração livre da viga de Euler-Bernoulli parcialmente uniforme e não uniforme com base elástica e massa no topo.

Wu e Hsu (2007) analisaram a vibração livre de uma viga de Euler-Bernoulli parcialmente submersa com suporte elástico e massa excêntrica na extremidade livre usando dois conjuntos separados de análise. Wu e Chen (2010) estudaram as vibrações induzidas por ondas em uma viga de Timoshenko imersa, carregada axialmente, com uma massa concentrada excêntrica considerando a inércia rotacional usando a formulação analítica. De Rosa *et al* (2013) desenvolveu uma solução fechada para vibração livre de uma coluna linearmente afunilada, parcialmente imersa e elasticamente apoiada com massa no topo. Ankit e Datta (2015) modelou uma torre oceânica como uma viga de Timoshenko não uniforme, parcialmente submersa suportada por uma massa com excentricidade na extremidade livre e uma fundação não amortecida na outra extremidade. Tendo em vista que as ações ambientais atuantes em uma estrutura *offshore* não são estáticas, torna-se importante o estudo do comportamento dinâmico da estrutura.

Zang *et al.* (2018) propuseram um modelo substituto baseado na função de base radial (RBF) para estimar o desempenho hidrodinâmico do TLP. Um algoritmo evolutivo multiobjetivo, *Non-dominated Sorting Genetic Algorithm II* (NSGA II), foi empregado para encontrar as soluções ótimas de Pareto. Choi *et al.* (2018) apresentaram uma análise numérica e experimental do comportamento acoplado de uma TLP combinada com uma plataforma semissubmersível. Testes de decaimento livre foram conduzidos para o TLP e semissubmersível, o que mostrou que o sistema TLP e o sistema semissubmersível possuíam comportamentos acoplados complexos com múltiplos componentes de frequências de modo natural. Para investigar este comportamento rigorosamente, foi aplicada uma análise de autovalor. Os modos e períodos naturais do sistema multi-corpo foram identificados a partir da análise de autovalores. Um conjunto selecionado de experimentos de modelo foi comparado com simulações numéricas correspondentes que mostraram uma boa concordância.

Esse trabalho apresenta uma análise das frequências e modos de vibração de um tendão, considerando condições de contorno não clássicas para o caso submerso e não-submerso. A princípio são apresentadas as equações de energia da viga e através da aplicação do princípio de Hamilton é adotada a equação diferencial para o problema de vibração livre de uma viga. Posteriormente, um elemento finito de viga com dois graus de liberdade por nó, é desenvolvido e então, um exemplo numérico é apresentado e os resultados obtidos são discutidos e comparados com a literatura.

2 TEORIA CLÁSSICA

No modelo de Euler-Bernoulli considera-se a contribuição do momento fletor e da inércia de translação, assim a energia de deformação referente à flexão U e a energia potencial T , podem ser escritas, respectivamente, como:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad e \quad T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A \left(\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} \right)^2 dx, \quad (1)$$

onde L é o comprimento da viga, I o momento e inércia da seção transversal, E o módulo de elasticidade, ρ a massa específica e A a área da seção transversal. Considerando que a viga esteja em vibração livre, o Princípio de Hamilton e da seguinte forma:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - U) dt = 0, \quad (2)$$

sendo t_1 e t_2 os instantes de tempo em que a configuração do sistema é conhecida, e $\delta()$ o símbolo que denota variação virtual. Substituindo as Equações (1) em (2) obtém-se após algumas manipulações matemáticas:

$$EI \frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} = 0. \quad (3)$$

A Equação (3) é conhecida como a equação diferencial parcial que governa o comportamento de uma viga de Euler-Bernoulli. Assumindo que a viga é excitada harmonicamente por uma frequência ω , o deslocamento transversal $v(x,t)$ pode ser escrito como:

$$v(x,t) = V(x)e^{j\omega t} \quad e \quad \xi = x/L, \quad (4)$$

onde ξ é o comprimento adimensional, $V(x)$, a função normal de $v(x,t)$ e $j = \sqrt{-1}$. Substituindo as relações apresentadas na Eq. (4) em Eq. (3) e omitindo o termo em comum $e^{j\omega t}$, obtém-se:

$$\frac{\partial^4 V(\xi)}{\partial \xi^4} - b^2 V(\xi) = 0, \quad (5)$$

com

$$b^2 = \frac{\rho AL^4}{EI} \omega^2 \quad e \quad \omega = 2\pi f, \quad (6)$$

sendo f a frequência natural e b um parâmetro adimensional associado a essa frequência. A solução $V(\xi)$ pode ser expressa em termos trigonométricos e hiperbólicos, da seguinte forma:

$$V(\xi) = C_1 \cos(\beta\xi) + C_2 \sin(\beta\xi) + C_3 \cosh(\beta\xi) + C_4 \sinh(\beta\xi), \quad (7)$$

onde $\beta = \sqrt{b}$. A função $V(\xi)$ é conhecida como o modo normal ou modo de vibração da viga. As constantes C_1 a C_4 são determinadas pela avaliação das expressões para cisalhamento, momento, rotação ou deflexão em um determinado ponto na viga no qual o valor da função é conhecido. Esses valores são denominados condições de contorno e são apresentados na Tabela 1. Os coeficientes de rigidez translacional e rotacional podem ser ajustados para representar condições de contorno clássica e não clássica pela manipulação dos coeficientes k_t e k_r .

Tabela 1. Condições de Contorno

Condições de Contorno	Deflexão	Rotação	Momento	Cisalhamento
Mola Translacional	-	-	$EI \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} = 0$	$EI \frac{\partial^3 v(x, t)}{\partial x^3} = k_t v(x, t)$
Mola Rotacional	-	-	$EI \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} = k_r v(x, t)$	$EI \frac{\partial^3 v(x, t)}{\partial x^3} = 0$
Massa Concentrada	-	-	$EI \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} = 0$	$EI \frac{\partial^3 v(x, t)}{\partial x^3} = M_c v(x, t)$

3 INFLUÊNCIA DA MASSA DA ÁGUA

Quando um corpo de massa M se move com uma velocidade Q em um fluido em repouso, sua energia cinética (E_c) será (Manson, 1981):

$$E_c = \frac{1}{2} M Q^2. \quad (8)$$

A existência desse corpo induz, automaticamente, um movimento no fluido ao seu redor (perturbação), que tende a desaparecer à medida que a distância que o separa do corpo tende ao infinito. A lei que rege o decaimento do movimento do fluido depende do formato do corpo; e longe deste pode-se dizer que as velocidades das partículas $H(x, y, t)$ decrescem com $1/r^2$ em que r é a distância do centro do corpo ao ponto considerado (Pedroso, 1982). A energia cinética do fluido circundando o corpo que se perturba (E_c^f) será:

$$E_c^f = \iint_{lim}^{\infty} \frac{1}{2} \rho H^2(x, y, t) dA, \quad (9)$$

onde lim é o limite do corpo e dA é a área elementar do mesmo. Dessa forma, a energia cinética total do sistema será a soma entre a energia cinética do fluido, Equação (8) e a energia cinética do fluido circundando o corpo, Equação (9), ou seja:

$$E_{cTotal} = \frac{1}{2} H^2 \left[M + \rho \iint_{lim}^{\infty} \left(\frac{H}{Q} \right)^2 dA \right], \quad (10)$$

na qual o segundo termo da equação acima é nada mais que a massa adicional (M^*) isto é:

$$M^* = \rho \iint_{lim}^{\infty} \left(\frac{H}{Q}\right)^2 dA. \quad (11)$$

Considerando um cilindro circular de raio R submerso se movendo num fluido em águas profundas a massa adicional será:

$$M^* = \rho\pi R^2 L. \quad (12)$$

A massa adicional (M^*) representa o fluido deslocado pelo movimento do cilindro e deve ser considerada na dinâmica do mesmo (Bomtempo, 2014). Sendo assim as frequências naturais para a condição submersa são dadas pela Equação (13), na qual está incluído a massa adicional, isto é:

$$\omega_{submersa} = b \sqrt{\frac{EI}{(\rho A + M^*)L^4}}. \quad (13)$$

4 ELEMENTOS FINITOS

Utilizando a coordenada adimensional (ξ) e o comprimento elementar (l_e) definidos nas Figura 1, o deslocamento V pode ser escrito matricialmente da seguinte maneira:

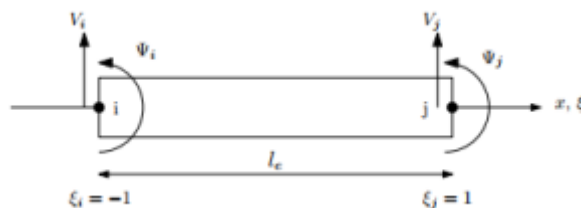


Figura 1. Elemento de Viga

Fonte: (Autor, 2018)

$$V = [N(\xi)]\{v\}_e \text{ e } N_i(\xi) = \sum_{i=0}^3 \lambda_i \xi^i, \quad (14)$$

onde $N_i(\xi)$ é uma função de forma cúbica e λ_i é o coeficiente de funções de forma. Considerando uma mola translacional (k_t), uma mola rotacional (k_r) e uma massa concentrada (M_c) conectadas a uma viga, a energia potencial e cinética para o elemento de viga uniforme é dada por, respectivamente:

$$U_e = \frac{1}{2} \frac{EI}{a} \int_{-1}^1 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2}\right)^2 d\xi + \frac{1}{2} k_r \left(\frac{\partial V}{\partial \xi}\right)^2 + \frac{1}{2} k_t V^2, \quad (15)$$

$$T_e = \frac{1}{2} \rho A a \int_{-1}^1 \frac{\partial V}{\partial t} d\xi + \frac{1}{2} M_c \frac{\partial V}{\partial t}, \quad (16)$$

onde l_e é o comprimento do elemento e $a = l_e/2$. Substituindo o deslocamento Eq. (14) na energia potencial Eq. (15) temos:

$$U_e = \frac{1}{2} \{v\}_e^T \left\{ \frac{EI}{a} \int_{-1}^1 [N(\xi)']^T [N(\xi)'] d\xi \right\} \{v\}_e + \frac{1}{2} \{v\}_e^T \{k_r [N(\xi)']^T [N(\xi)']\} \{v\}_e + \frac{1}{2} \{v\}_e^T \{k_t [N(\xi)]^T [N(\xi)]\} \{v\}_e. \quad (17)$$

Sendo $[N(\xi)'] = [\partial N(\xi)/\partial \xi]$, a matriz de rigidez elementar pode ser escrita como:

$$[k_e] = \left[\frac{EI}{a} \int_{-1}^1 [N(\xi)']^T [N(\xi)'] d\xi + k_r [N(\xi)']^T [N(\xi)'] + k_t [N(\xi)]^T [N(\xi)] \right]. \quad (18)$$

Substituindo o deslocamento Eq. (14) na energia cinética Eq. (16) temos:

$$T_e = \frac{1}{2} \{\dot{v}\}_e^T \left\{ \rho A a \int_{-1}^1 [N(\xi)]^T [N(\xi)] d\xi \right\} \{\dot{v}\}_e + \frac{1}{2} \{\dot{v}\}_e^T \{M_c [N(\xi)]^T [N(\xi)]\} \{\dot{v}\}_e. \quad (19)$$

Sendo assim, a matriz de massa para o elemento é escrita como:

$$[m_e] = \left[\rho A a \int_{-1}^1 [N(\xi)]^T [N(\xi)] d\xi + M_c [N(\xi)]^T [N(\xi)] \right]. \quad (20)$$

5 RESULTADOS NUMÉRICOS

Com o objetivo de analisar as frequências naturais e os modos de vibração de um tendão de uma plataforma TLP, dois exemplos numéricos são apresentados. No primeiro caso, será discutido a influência das constantes elásticas no comportamento da viga, posteriormente, será analisado o efeito da inclusão de massa da água nas frequências naturais da viga.

5.1 Viga Não Submersa

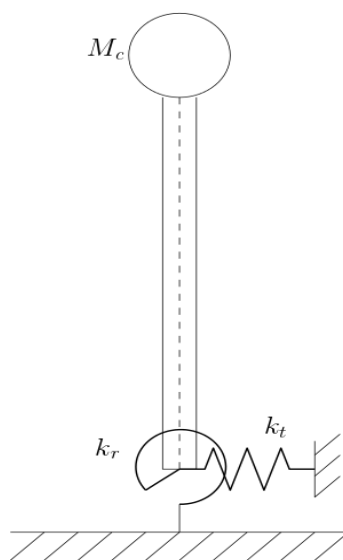


Figura 2. Viga composta por massa concentrada e molas translacionais e rotacionais

Fonte: (Autor, 2018)

Neste exemplo, adota-se valores específicos de coeficientes de rigidez rotacional e translacional com o objetivo de analisar a influência da rigidez de cada mola na frequência natural e nos modos de vibração do tendão. A viga é considerada restrita em sua base por

uma mola torcional e uma mola translacional e possui uma massa concentrada na extremidade livre igual a $M_c = 100 \text{ kg}$, conforme mostrado na Figura 2, com comprimento $L = 1 \text{ m}$, $EI = 8000 \text{ Nm}$ e $\rho A = 3000 \text{ kg m}$.

Tabela 2: Frequências naturais de vibração com variação das constantes elásticas das molas.

Frequências Naturais, $\omega_n, \text{rad/s}$	Solução Analítica		MEF (80 elementos)			
	$k_t = 10^3$ e $k_r = 0$	$k_t = 0$ e $k_r = 10^3$	$k_t = 10^3$ e $k_r = 0$	$k_t = 0$ e $k_r = 10^3$	$k_t = k_r = 10^3$	$k_t = k_r = 10^{16}$
ω_1	34.53684	34.89176	34.53685	34.89176	34.91031	37.47406
ω_2	95.64181	96.02882	95.64181	96.02883	96.03562	106.27289
ω_3	188.29105	188.68417	188.29109	188.68421	188.68768	211.99162
ω_4	312.41043	312.80712	312.41061	312.80731	312.80941	361.15076
ω_5	468.19670	468.59564	468.19732	468.59626	468.59766	558.59535

A Tabela 2 apresenta as cinco primeiras frequências naturais da viga. A segunda e a terceira colunas apresentam os valores obtidos analiticamente, considerando somente a mola translacional ($k_r = 0 \text{ Nm/rad}$) e somente a mola rotacional ($k_t = 0 \text{ Nm/rad}$), respectivamente. Os valores obtidos através do Método dos Elementos Finitos, (MEF), para as mesmas condições, estão apresentados terceira e quarta colunas e seus modos de vibração são apresentados na Figuras 3. As frequências obtidas considerando simultaneamente a mola torcional e rotacional estão apresentadas na sexta e sétima coluna.

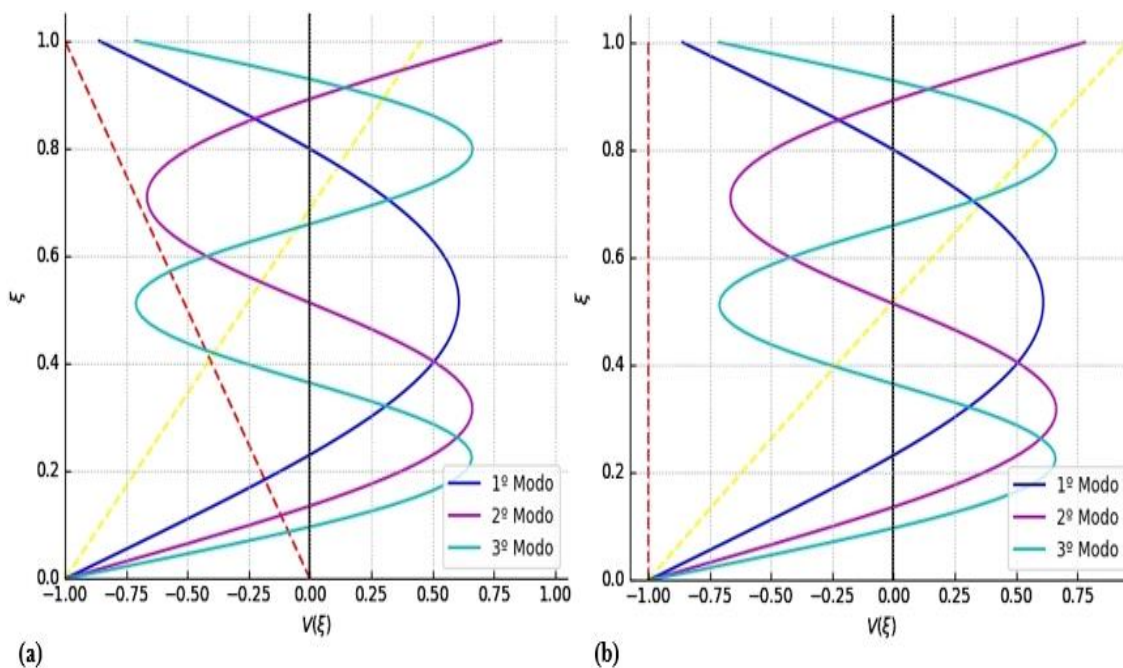


Figura 3. Três primeiros modos: (a) $k_t = 10^3 \text{ Nm/rad}$ e $k_r = 0 \text{ Nm/rad}$; (b) $k_t = 0 \text{ Nm/rad}$ e $k_r = 10^3 \text{ Nm/rad}$.

Fonte: (Autor, 2018)

Observa-se que a inclusão da mola rotacional aumenta o valor da frequência natural e que se as constantes das molas forem suficientemente rígidas é possível simular a condição de engaste, como apresentado na sétima coluna da Tabela 2. No gráfico da Figura 4, são apresentados os modos de vibração para o caso $k_t = k_r = 10^3 \text{ Nm/rad}$.

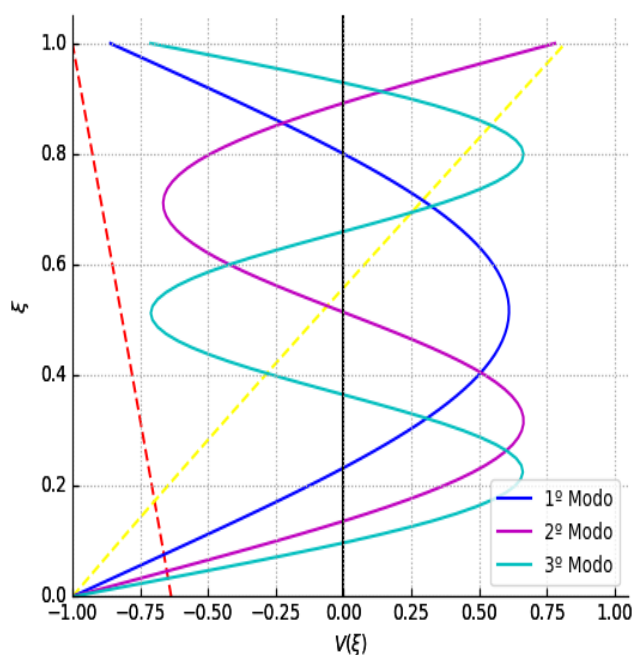


Figura 4. Três primeiros modos: $k_t = 10^3 \text{ Nm/rad}$ e $k_r = 10^3 \text{ Nm/rad}$.

Fonte: (Autor, 2018)

O modo de corpo rígido, destacado pelas linhas tracejadas nos gráficos da Figura 3 e 4, é uma translação da viga devido a uma força constante aplicada no centro de massa. A frequência do modo de corpo rígido correspondente é zero porque a viga não oscila de fato. O modo de corpo rígido tem energia de deformação associada a zero e pode ser interpretado como significando que a vibração ocorre infinitamente lentamente, de modo que não há forças de inércia associadas.

5.2 Viga Submersa

Neste exemplo, a influência da massa da água é investigada para uma viga de seção circular de diâmetro $d = 0.0257 \text{ m}$, $A = 0.000506707 \text{ m}^2$, $I = 2.04 * 10^{-8} \text{ m}^4$, $E = 73 * 10^9 \text{ Pa}$, $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$, $M_c = 100 \text{ kg}$, $k_t = k_r = 10^3 \text{ Nm/rad}$. A Tabela 3, apresenta as cinco primeiras frequências para o caso não-submerso e o caso submerso. Nota-se que a consideração da massa de água diminui os valores das frequências naturais.

Tabela 3: Frequências naturais de vibração submersas e não submersas.

Frequências Naturais, rad/s	Não submersa	Submersa
ω_1	322.61955	228.12647
ω_2	992.32934	701.68281
ω_3	2043.95733	1445.29609
ω_4	3477.63488	2459.05921
ω_5	5293.452183	3743.03593

6 CONCLUSÃO

O tendão de uma estrutura TLP foi modelado a partir da teoria de viga de Euler-Bernoulli considerando uma mola translacional e uma mola rotacional em sua base e uma massa concentrada em sua extremidade livre, Figura 2. A equação diferencial do movimento foi obtida através do Princípio de Hamilton e, após a aplicação das condições de contorno, foram obtidas a equação da frequência e os modos de vibração. Posteriormente, um elemento finito foi desenvolvido considerando a rigidez das molas.

Os resultados numéricos mostraram boa concordância com a solução analítica, observou-se que o efeito da inclusão da mola rotacional aumenta ligeiramente a frequência natural quando comparado à inclusão da mola translacional e ainda que, a inclusão das duas molas aumenta significativamente a frequência natural.

Observou-se também que a inclusão da massa de água diminui a frequência natural da viga. Modos de vibração de corpo rígidos foram observados nos gráficos e foi possível simular a condição de engaste para valores de constantes de molas suficientemente elevados.

REFERÊNCIAS

- Adrezin, R., & Benaroya, H., 1999. Non-linear stochastic dynamics of tension leg platforms. *Journal of Sound and vibration*, 220(1), 27-65.
- Ankit, A., & Datta, N., 2015. Free transverse vibration of ocean tower, *Ocean Eng*, 107, 271-282.
- Auciello, N.M., & Ercolano, A., 2004. A general solution for dynamic response of axially loaded non-uniform Timoshenko beams. *Int. J. Solids Struct.* 41 (18–19), 4861–4874.
- Bomtempo, T. B. S., 2014. Um estudo sobre a influência do deck no comportamento de plataformas offshore fixas submetidas a ações dinâmicas. Monografia de Projeto Final 2, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Grupo de Dinâmica e Fluido-Estrutura, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 75p.



- Choi, Y. M., Nam, B. W., Hong, S. Y., Jung, D. W., & Kim, H. J., 2018. Coupled motion analysis of a tension leg platform with a tender semi-submersible system. *Ocean Engineering*, 156, 224-239.
- De Rosa, M.A., Lippiello, M., Vairo, F., & Maurizi, M.J., 2013. Free vibration analysis of a variable cross-section column partially immersed in a liquid. *Ocean Eng.* 72, 160–166.
- Mason, J., 1981. Obras portuárias. Rio de Janeiro: Elsevier.
- Pedroso, L. J., 1982. *Alguns aspectos da interação fluido-estrutura em estruturas offshore*. Rio de Janeiro: COPPE/UFRJ, 340p. Tese (Mestre em estruturas), Programa de engenharia civil, UFRJ, Rio de Janeiro.
- Uscilowska, A., & Kolodziej, P., 1998. Free vibration of immersed column carrying a tip mass. *J. Sound Vib.* 216 (1), 147–157.
- Wu, J.S., & Chen, C.T., 2005. An exact solution for the natural frequencies and mode shapes of an immersed elastically restrained wedge beam carrying an eccentric tip mass with mass moment of inertia. *J. Sound Vib.* 286 (3), 549–568.
- Wu, J.S., & Chen, C.T., 2010. Wave-induced vibrations of an axial-loaded immersed Timoshenko beam carrying an eccentric tip mass with rotary inertia. *J. Ship Res.* 54 (1), 15–33.
- Wu, J.S., & Hsu, H.S., 2007. The discrete methods for free vibration analyses of an immersed beam carrying an eccentric tip mass with rotary inertia. *Ocean Engineering* 34 (1), 54–68.
- Zhang, X., Song, X., Qiu, W., Yuan, Z., You, Y., & Deng, N., 2018. Multi-objective optimization of Tension Leg Platform using evolutionary algorithm based on surrogate model. *Ocean Engineering*, 148, 612-631.